Письма в АЖ, т. 9, № 10, 1983

УДК 524.8

СПЕКТР ВОЗМУЩЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НЕСИНГУЛЯРНОЙ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ С НАЧАЛЬНОЙ СТАДИЕЙ ДЕ-СИТТЕРА, И АНИЗОТРОПИЯ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. СТАРОБИНСКИЙ

Вычислен спектр первичных адиабатических возмущений и гравитационных волн, возникающих в предложенной ранее автором несингулярной модели Вселенной с начальной квантовой стадией де-Ситтера, созданной гравитационной поляризацией вакуума. Спектр гравитационных волн оказывается плоским, спектр адиабатических возмущений — близким к плоскому. Рассчитана величина крупномасштабной анизотропии температуры реликтового электромагнитного излучения, вызванной этими возмущениями. Показано, что в случае плоского спектра возмущений наиболее перспективным методом обнаружения этой анизотропии является исследование корреляций $\Delta T/T$ на углах $5° \div 10°$.

SPECTRUM OF PERTURBATIONS FORMED IN A NONSINGULAR COSMOLOGICAL MODEL WITH THE INITIAL DE SITTER STAGE AND THE ANISOTROPY OF THE BACKGROUND RADIATION, by A. A. Starobinskij. Spectrum of primeval adiabatic perturbations and gravitational waves formed in the proposed earlier by the author nonsingular cosmological model with the initial quantum de Sitter stage generated by gravitational vacuum polarization is calculated. The spectrum of gravitational waves appears to be flat, the spectrum of adiabatic perturbations is close to the flat one. The large-scale anisotropy of the temperature of the relic background electromagnetic radiation due to these fluctuations is found. It is shown that the most promising way to detect the anisotropy in the case of a flat perturbation spectrum is the investigation of correlations of $\Delta T/T$ at the angles of $5° \div 10°$.

Как известно, строение видимой нами части Вселенной в масштабах, больших 100 Мпс, хорошо описывается однородной изотропной моделью Фридмана с малыми возмущениями и относительной плотностью вещества $\Omega = \rho/\rho_{crit}$, не сильно отличающейся от единицы. Чтобы такое сегодняшнее состояние Вселенной могло возникнуть, начальные условия для гравитационного поля и вещества вблизи космологической сингулярности ($t \to 0$) должны были иметь весьма специальный вид. В этом состоит фундаментальная проблема начальных условий в классической космологии.

Новый подход к решению этой проблемы появился в последние годы, когда удалось построить конкретные, хотя и идеализированные модели (Старобинский, 1980; Гут, 1981; Линде, 1982), в которых Вселенная на очень ранней стадии своей эволюции (вблизи планковского момента) проходила через стадию экспоненциального расширения: $a(t) \propto e^{Ht}$, $H = \text{const}$. Гут (1981) эту стадию предложил называть «инфляционная» стадия. Мы будем использовать более строгий термин «де-ситтеровская стадия», поскольку на этой стадии метрика пространства — времени приближенно совпадает с метрикой де-Ситтера. В космологических моделях с достаточно длительной де-ситтеровской стадией вся эволюция наблюдаемой нами части Вселенной однозначно определяется видом микроскопического лагранжиана и практически не зависит от начальных условий.

Для того чтобы такие космологические модели могли описывать почти однородную и изотропную Вселенную, параметры эффективного лагранжиана должны удовлетворять некоторым неравенствам. Наиболее сильные ограничения на эти модели дает величина адиабатических возмущений. Для одного типа моделей с де-ситтеровской стадией, в которых последняя возникает при неравновесном фазовом переходе, спектр генерируемых адиабатических возмущений был рассчитан Хокингом (1982), Старобинским (1982) и Гутом и Паем (1982). В настоящей работе вычислен спектр адиабатических возмущений, возникающих в модели автора (Старобинский, 1980), где де-ситтеровская стадия создана поляризацией вакуума квантовых полей гравитационным полем. В статье рассматриваются также спектр тензорных возмущений (гравитационных волн) и ожидаемая крупномасштабная анизотропия реликтового электромагнитного излучения.

Для расчета возмущений нам потребуется более подробно исследовать структуру де-ситтеровской стадии в рассматриваемой модели (Старобинский, 1980). Для случая однородной и изотропной модели след уравнений Эйнштейна в этой модели имеет вид *

$$R+\frac{1}{M^2}R_{;\,i}^{;\,i}=\frac{1}{H_0{}^2}\left(R_{ik}R^{ik}-\frac{1}{3}R^2\right), \tag{1}$$

где R — скалярная кривизна, точка с запятой означает ковариантную производную, а M и H_0 — некоторые феноменологические постоянные, удовлетворяющие неравенствам $GM^2 \ll GH_0{}^2 \ll 1$ (в цитируемой работе автора (Старобинский, 1980) величина H_0 была обозначена через H). Пусть $H \equiv \dot{a}/a$, так что масштабный фактор $a\,(t) = a_0 \exp\,(\int H\,(t)\,dt)$. Будем называть обобщенной де-ситтеровской стадией режим, когда $|\,\dot{H}\,| \ll H^2$. Тогда $R_i^k \approx \frac{1}{4}\delta_i^k R \approx -3H^2\delta_i^k$. В результате из (1) следует, что

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = H_0\,\mathrm{th}\left[\frac{M^2}{6H_0}(t_S-t)\right], \quad t_S=\mathrm{const},$$
$$a\,(t) = a_1\left[\mathrm{ch}\left(\frac{M^2}{6H_0}(t_S-t)\right)\right]^{-6H_0^2/M^2}. \tag{2}$$

Формула (2) применима при $M\,(t_S - t) \gg 1$. При $M\,(t_S - t) \sim 1$ величина $\dot{H} \sim H^2 \sim M^2$ и обобщенная де-ситтеровская стадия кончается. Далее идет скаляронная стадия, где $a\,(t) \propto t^{2/3}$ с точностью до малых осцилляций. Величины t_S (момент конца стадии (2)) и a_1 (размер Вселенной при $t = t_S$) связаны с однородным возмущением скалярной кривизны $\delta_0 = \delta R\,(t = 0)/\,|\,R_0\,|$ (где $R_0 = -12H_0{}^2$, $0 < \delta_0 \ll 1$) формулами

$$t_S = \frac{3H_0}{M^2}\ln\frac{4}{\delta_0}, \quad \ln\frac{a_1}{a\,(t=0)} = \frac{3H_0{}^2}{M^2}\ln\frac{1}{\delta_0}. \tag{3}$$

При $\frac{M^2}{H_0}(t_S - t) \gg 1$ величина $H \approx H_0$ и решение сводится к обычной метрике де-Ситтера. В области $M^{-1} \ll t_S - t \ll H_0 M^{-2}$ мы получаем интересную асимптотику, описывающую конец обобщенной де-ситтеровской стадии:

$$H = \frac{M^2}{6}(t_S - t), \quad M \ll H \ll H_0, \quad R = -\frac{M^4}{3}(t_S - t)^2,$$
$$a\,(t) = a_1 \exp\left[-\frac{M^2}{12}(t_S - t)^2\right]. \tag{4}$$

---

* В статье принято $\hbar = c = 1$.

Интересно, что в формулы (4) вообще не входит H_0. Это значит, что можно снять ограничение $GH_0^2 \ll 1$, сохранив только условие $GM^2 \ll 1$. Тогда, если при $t \sim t_g = \sqrt{G}$ флуктуационно возникло большое значение $R(t_g) < 0$, $|R(t_g)| \gg M^2$, то при $t > t_g$ сразу начнется квази-де-ситтеровская стадия (4), причем

$$t_S = \sqrt{3|R(t_g)|}/M^2, \quad \frac{a_1}{a(t_g)} = \exp\left(\frac{|R(t_g)|}{4M^2}\right). \tag{5}$$

Механизм генерации скалярных (адиабатических) возмущений в рассматриваемой модели аналогичен механизму генерации возмущений в космологической модели с де-ситтеровской стадией, возникшей при фазовом переходе (Хокинг, 1982; Старобинский, 1982; Гут и Пай, 1982). Он состоит из двух частей. Вначале на де-ситтеровской стадии появляются малые квантовые пространственно-неоднородные скаляронные флуктуации, т. е. флуктуации скалярной кривизны R. Эти флуктуации были впервые рассмотрены Мухановым и Чибисовым (1981), в линейном приближении они конформно-плоские, т. е. в них $C_{iklm} = 0$, где C_{iklm} — конформный тензор Вейля (Старобинский, 1981). Они приводят к пространственной неоднородности момента конца де-ситтеровской стадии, т. е. величина t_S становится зависящей от координат. В результате этого после конца де-ситтеровской стадии возникают вторичные, неконформно-плоские возмущения, которые представляют собой растущую моду лифшицевских адиабатических возмущений. При этом падающая мода уже при $t \sim t_S$ оказывается малой по сравнению с растущей модой и в дальнейшем ею можно пренебречь. Первичные скаляронные возмущения затухают при $M(t - t_S) \gg 1$ вследствие эффекта рождения частиц (Старобинский, 1980). Вторичные адиабатические возмущения остаются неизменными вплоть до момента, близкого к настоящему времени, когда их длина волны λ снова становится порядка горизонта.

В области, где λ много больше горизонта, растущая мода адиабатических возмущений в синхронной системе отсчета описывается, как известно, постоянными во времени относительными возмущениями метрики $h_\alpha^\beta(\mathbf{r})$, α $\beta = 1, 2, 3$; $|h_\alpha^\beta| \ll 1$. С помощью преобразования координат, не нарушающего синхронности, h_α^β всегда можно привести к виду $h_\alpha^\beta(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r})\,\delta_\alpha^\beta$. Тогда имеют место простые формулы (см., например, Старобинский, 1982); более строгий их вывод для рассматриваемой модели будет дан в другом месте):

$$h(\mathbf{r}) = 2H\delta t_S(\mathbf{r}), \quad \delta t_S(\mathbf{r}) = -\delta R(\mathbf{r}, t)/\dot{R}(t). \tag{6}$$

При этом величины H, R и δR нужно брать в момент времени t_λ, когда $\lambda = H^{-1}$ (более точно, в любой момент t_λ', удовлетворяющий неравенствам $H^{-1} \ll t_\lambda' - t_\lambda \ll H/\dot{H}$).

Перейдем в фурье-представление. Пусть

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k h_k e^{i\mathbf{kr}}, \quad \lambda = \frac{a(t)}{k}, \quad k = |\mathbf{k}|, \tag{7}$$

и аналогично для $\delta R(\mathbf{r}, t)$. При $M^2 \ll H_0^2$ на де-ситтеровской стадии скаляронные колебания приближенно удовлетворяют уравнению $(\delta R)_{;i}^{;i} = 0$, поэтому проблема вычисления $\delta R_k(t)$ сводится к решенной задаче о квантовании безмассового скалярного поля φ на фоне метрики де-Ситтера (Банч и Дэвис, 1978) и к нахождению коэффициента пропорциональности между δR и φ. Наиболее надежный метод вычисления последнего состоит в расчете тензора энергии-импульса высокочастотных скаляронов по методу Айзексона, после чего полученное выражение сравнивается с тензором энергии-импульса скалярного поля. Расчет показывает, что при $M^2 \ll H_0^2$ и $M^2 \ll H^2$ имеем

$$\delta R = \varphi\,(192\pi G M^2 H^2)^{1/2}, \tag{8}$$

что совпадает с результатом Муханова и Чибисова (1981) при $H = H_0$. Флуктуации $\delta R_k(t)$ и h_k оказываются гауссовыми с нулевым средним. В дальнейшем под δR_k и h_k мы будем иметь в виду их среднеквадратичное значение. Тогда при $t = t_{\lambda}'$

$$\delta R_k = \varphi_k (192\pi G M^2 H^2)^{1/2} = \frac{H}{\sqrt{2} k^{3/2}} (192\pi G M^2 H^2)^{1/2}. \tag{9}$$

Используя (6) и (2), получаем окончательно спектр адиабатических возмущений:

$$h_k = \frac{1}{k^{3/2}} \sqrt{24\pi G M^2} \frac{H_0^2}{M^2} \operatorname{sh}^2 \frac{M^2}{6H_0} (t_S - t)\,|_{k=aH} =$$
$$= \frac{1}{k^{3/2}} \sqrt{24\pi G M^2} \frac{H_0^2}{M^2} \left[\left(\frac{H a_1}{k} \right)^{M^2/3H_0^2} - 1 \right]. \tag{10}$$

Для достаточно коротких волн условие $\lambda = H^{-1}$ выполняется уже на стадии (4). Для таких волн из (10) следует:

$$h_k \approx \frac{1}{k^{3/2}} \ln\left(\frac{k_1}{k}\right) \sqrt{\frac{8\pi G M^2}{3}}. \tag{11}$$

где $k_1 = M a_1$ ($a(t)/k_1 \sim 10^{-1}$ см в настоящий момент, если после рассматриваемой де-ситтеровской стадии не было других таких стадий с меньшей кривизной). Формула (11) верна при $1 \ll \ln \frac{k_1}{k} \ll \frac{3H_0^2}{M^2}$. Если $M < 0.2 H_0$, то спектр (11) описывает всю наблюдаемую часть мира. Величина H_0 в (11) не входит.

Таким образом, спектр h_k оказался почти плоским. Возникновение почти плоского спектра адиабатических возмущений является общим свойством всех моделей с де-ситтеровской стадией. Интересно отметить, что в рассматриваемой модели возмущения метрики (10), (11) появляются ранее, чем возникает обычное вещество.

Спектр гравитационных волн, генерируемый в космологических моделях с де-ситтеровской стадией, был впервые рассчитан автором (Старобинский, 1979). Однако результат, полученный в последней работе, буквально применим только к де-ситтеровской стадии, возникающей при фазовом переходе. В случае рассматриваемой модели нужно учесть однопетлевые квантово-гравитационные поправки к уравнению гравитационных волн на фоне метрики Фридмана (Старобинский, 1981). Это приводит к появлению в ответе для амплитуды гравитационных волн дополнительного малого множителя $M/2H_0$. Если

$$h_\alpha^\beta = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, e_\alpha^\beta e^{i\mathbf{kr}} h_k(t), \tag{12}$$

где e_α^β — поляризационный тензор, $e_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta} = 1$ для каждой поляризации, то для гравитационных волн с длиной волны, большей горизонта, средне-квадратичное значение h_k в данной модели оказывается равным

$$h_k = \frac{1}{k^{3/2}} \cdot 2 \sqrt{\pi G M^2}. \tag{13}$$

Спектр гравитационных волн является строго плоским. Из-за наличия логарифма в (11) амплитуда адиабатических возмущений больше, чем амплитуда гравитационных волн — гипотеза равнораспределения не выполняется. Заметим, что модель предсказывает также отсутствие первичных вихревых и энтропийных возмущений.

Зная спектр первичных возмущений, можно рассчитать анизотропию температуры реликтового электромагнитного излучения $\Delta T/T$. Мы будем рассматривать только крупномасштабную анизотропию: $l < \sqrt{z_{rec}} \sim 40$, что соответствует углам $\theta > 5°$. В этой области анизотропия реликтового излучения вызвана непосредственно возмущениями метрики и ответ дается формулой Сакса и Вольфа (1967):

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\eta_{rec}}^{\eta_0} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial\eta} e^{\alpha} e^{\beta}\, d\eta, \tag{14}$$

где интеграл берется вдоль траектории светового луча с касательным вектором e^{α}, $\eta = \int dt/a(t)$, η_0 соответствует настоящему моменту, а η_{rec} — моменту рекомбинации. При $l < \sqrt{Z_{rec}}$ нижний предел можно положить равным нулю.

Из полученного ниже ограничения на M следует, что де-ситтеровская стадия (2) или (4) оказывается настолько длинной, что в настоящий момент времени с большой точностью $\Omega = 1$. Если необходимая для этого плотность вещества создается массивными нейтрино, то сумма их масс должна удовлетворять условию:

$$\sum_i m_{\nu i} \approx 24 \left(\frac{h}{50}\right)^2 \left(\frac{2.7K}{T}\right)^3 \text{эВ}, \tag{15}$$

где h — современное значение постоянной Хаббла в км/с·Мпс. Тогда $a(t) \propto t^{2/3}$ в настоящее время. Подставляя в формулу (14) лифшицевские решения для адиабатических возмущений с начальным условием в виде плоского спектра $h_k = A/k^{3/2}$ (при этом $(\delta\rho/\rho)_k = \frac{1}{20} h_k k^2 \eta^2$) и разлагая по нормированным сферическим гармоникам $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, нетрудно найти

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{lm} \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\left\langle \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2_{lm} \right\rangle = \frac{A^2}{100\pi l(l+1)}, \quad 2 \leqslant l < 40 \tag{16}$$

(этот результат был также приведен в недавних работах Пибблса (1982) и Шандарина и др. (1983)).

Усредненные по сфере среднеквадратичные амплитуды мультиполей

$$(\Delta T/T)_l = [(2l+1)/4\pi \langle (\Delta T/T)_{lm}^2 \rangle]^{1/2}$$

примерно одного порядка, их отношение для $l = 2, 3, 4, 5\ldots$ равно $1 : 0.84 : 0.73 : 0.66\ldots$. В этой ситуации более адекватной характеристикой является корреляционная функция (с исключенной дипольной составляющей):

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(0), \frac{\Delta T}{T}(\theta) \right\rangle = \frac{A^2}{400\pi^2} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \mathscr{P}_l(\cos\theta) = \frac{A^2}{400\pi^2} F(\theta), \tag{17}$$

$$F(\theta) = \ln\frac{1}{1-\cos\theta} - \frac{3}{2}\cos\theta + \ln 2 - 1.$$

В частности $F(10°) \approx 2.40$; $F(180°) = 0.5$. $F(\theta)$ имеет отрицательный минимум ≈ -0.40 при $\theta \approx 70°$. Видно, что в случае плоского спектра возмущений исследование корреляций $\Delta T/T$ на углах $5° \div 10°$ оказывается в 3—4 раза более чувствительным методом, чем поиск квадрупольной анизотропии. При $\theta < 5°$ величина флуктуаций $\Delta T/T$ может быть значительно ослаблена затянутостью рекомбинации.

Если воспользоваться верхней наблюдательной оценкой $\langle \Delta T_1 \Delta T_2 \rangle < 0.01$ (мК)^2 при $10° < \theta < 180°$, полученной Фиксеном и др. (1983), то при $T = 2.7$ К получаем $A < 1.5 \cdot 10^{-3}$. В работе Пибблса (1982) предлагается значение $A = 1.5 \cdot 10^{-4}$. Нам представляется, что A несколько больше, порядка $(0.3 \div 1) \cdot 10^{-3}$. В рассматриваемой модели (см. (11)) $A = \sqrt{8\pi GM^2/3} \ln (k_1/lk_{hor})$, поэтому для того, чтобы иметь $A = 10^{-3}$, должно быть $\sqrt{G}M \approx 5 \cdot 10^{-6}$, т. е. $M \approx 6 \cdot 10^{13}$ ГэВ. Такое малое значение M показывает, что модель нуждается в улучшении.

Что же касается гравитационных волн, то (как будет подробнее рассмотрено в другом месте) их вклад в $\Delta T/T$ в данной модели при $\theta \sim 10°$ составляет 5% от вклада адиабатических возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

Банч и Дэвис (Bunch T. S., Davies P. C. W.). Proc. Roy. Soc. London, 1978, *A360*, 117.

Гут (Guth A. H.) Phys. Rev. D, 1981, *23*, 347.

Гут и Пай (Guth A. H., Pi S. Y.). Phys. Rev. Letters, 1982, ***49***, 1110.

Линде (Linde A. D.). Phys. Letters, 1982, *108B*, 389.

Муханов В. Ф. и Чибисов Г. В. Письма в ЖЭТФ, 1981, *33*, 549.

Пибблс (Peebles P. J. E.). Astrophys. J. (Letters), 1982, *263*, L1.

Сакс и Вольф (Sachs R. K., Wolfe A. M.). Astrophys. J., 1967, *147*, 73.

Старобинский А. А. Письма в ЖЭТФ, 1979, *30*, 719.

Старобинский А. А. Phys. Letters, 1980, *91B*, 99.

Старобинский А. А. Письма в ЖЭТФ, 1981, *34*, 460.

Старобинский А. А. Phys. Letters, 1982, *117B*, 175.

Фиксен и др. (Fixsen D. J., Cheng E. S., Wilkinson D. T.). Phys. Rev. Letters, 1983, *50*, 620.

Хокинг (Hawking S. W.). Phys. Letters, 1982, *115B*, 295.

Шандарин С. Ф., Дорошкевич А. Г. и Зельдович Я. Б. Усп. физ. наук, 1983, *139*, 83.

Ин-т теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР, Москва

Поступила в редакцию
16 июня 1983 г.

Примечание к корректуре. Во избежание недоразумений нужно отметить, что для нахождения величины корреляционной функции (17) в углах 5°—10° нужны измерения анизотропии температуры реликтового излучения во всем интервале углов от 5° до 180°. В противном случае в сумме в формуле (17) будут обрезаны мультиполи с небольшими значениями l и величина корреляционной функции уменьшится. Другой практический вывод состоит в том, что при плоском спектре возмущений метрики дисперсия угловых флуктуаций температуры тем больше, чем шире диапазон углов, в которых проведены измерения.